SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

Angelo Cavallucci

EQUAZIONE DI HAMILTON-JACOBI GENERALIZZATA PER UN PROBLEMA DI CONTROLLO

7 maggio 1992

EQUAZIONE DI HAMILTON-JACOBI GENERALIZZATA PER UN PROBLEMA DI CONTROLLO

Angelo Cavallucci

Consideriamo il problema

$$(P) \qquad \begin{cases} f(x(1)) \to min \\ x \in W^{1,1}(0,1;R^n), \\ \dot{x}(t) \in F(t,x(t)) \; q.d. \text{ su } \quad [0,1], \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

e poniamo, per $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq 1$, $\xi \in R^n$, $0 \leq \tau \leq 1$,

$$S(t_0,t_1;\xi) = \{x(\cdot) \in W^{1,1}(0,1;R^n) \mid \dot{x}(t) \in F(t,x(t)) \; q.d., \; x(t_0) = \xi\},$$

$$V(\tau,\xi) = \inf\{f(x(1)) | \; x(\cdot) \in S(\tau,1;\xi)\}.$$

Ci proponiamo di esporre alcuni risultati di Vinter-Wolenski [8], [9] relativi alla funzione valore V, ottenuti sotto le seguenti ipotesi (minimali) sulla multifunzione F e sulla funzione f:

(H0) $f : R^n \to R$ é localmente lipschitziana;

(H1) $[0,1] \times R^n \ni (t,x) \to F(t,x) \neq \emptyset$ compatto $\subset R^n$;

(H2) esiste $\lambda \geq 0$ sommabile tale che

$$F(t,x') \subset F(t,x) + \lambda(t)|x - x'|B$$

per $0 \leq t \leq 1$ e $x, x' \in R^n$;

H(3) $F(\cdot,x)$ é misurabile per ogni x ed esiste la funzione sommabile $r \geq 0$ tale che

$$F(t,x) \subset [r(t) + \lambda(t)|x|]B$$

per ogni t e x.

Si é posto $B = \{x \in R^n | \; |x| \leq 1\}$.

TEOREMA 1. *Sotto le ipotesi (H0)-(H3) si ha*

$$\emptyset \neq S(\tau,1;\xi) \text{ per } 0 \leq \tau \leq 1, \; \xi \in R^n,$$

$$V(\tau,\xi) \leq +\infty \text{ per } \quad ,, \quad ,$$

$$V(1,\xi) = f(\xi) \text{ per } \xi \in R^n,$$

e inoltre

i) per ogni $R > 0$ *esistono* $0 \leq \gamma \in L^1(0,1)$ *e* $M \geq 0$ *tali che*

$$|V(t',\xi') - V(t,\xi)| \leq M(|\xi' - \xi| + \int_t^{t'} \gamma(s)\,ds) \quad per \quad |\xi'|,\ |\xi| \leq M, 0 \leq t \leq t' \leq 1,$$

ii) esiste $J \subset [0,1]$ *di misura nulla tale che*

$$\min_{v \in coF(t,\xi)} \liminf_{h \to 0+} \frac{V(t+h, \xi + hv) - V(t,\xi)}{h} = 0$$

per ogni $\xi \in R^n$ *e* $t \notin J$.

Questo risultato é contenuto in [8]. Lo stesso risultato, sotto l'ipotesi ulteriore di F continua, é contenuta in [7] (cfr. anche [3]).

La dimostrazione del Teorema 1 si fonda sulle proposizioni e sui lemmi che seguono.

Poniamo

$$F_0(t,x) = \text{ co } F(t,x),$$

$$S_0(t_0,t_1;\xi) = \{x(\cdot) \in W^{1,1}(t_0,t_1;R^n)|\ x(t_0) = \xi,$$

$$\dot{x}(t) \in \text{ co}F(t,x(t)) \text{ q.d. su } [0,1]\},$$

per $\xi \in R^n, 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq 1$. Abbiamo indicato con coA l'nvolucro convesso dell'insieme A.

Si verifica che perF_0 valgono le stesse condizioni (H1)-(H3) soddisfatte da F.

Proposizione 1. *Sia* $\xi \in R^n$, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq 1$. *Sotto le condizioni (H1)-(H3) si ha*

i) per ogni $y(\cdot) \in W^{1,1}(t_0,t_1;R^n)$ *e* $\xi \in R^n$ *esiste* $x(\cdot) \in W^{1,1}(t_0,t_1;R^n)$ *tale che*

$$\dot{x}(t) \in F(t,x(t)) \ q.d. \ su \ [0,1]\},\ x(0) = \xi,$$

$$|x(t) - y(t) - [x(t_0) - y(t_0)]| \leq |x(t_0) - y(t_0)|e^{\int_{t_0}^t \lambda(s)\,ds} +$$

$$+ \int_{t_0}^t e^{\int_s^t \lambda(\sigma)\,d\sigma} d(\dot{y}(s), F(s,y(s)))\,ds \quad per \quad t_0 \leq t \leq t_1;$$

ii) per ogni $y(\cdot) \in S_0(t_0,t_1;\xi)$ *e* $\epsilon \geq 0$ *esiste* $x(\cdot) \in S(t_0,t_1;\xi)$ *tale che*

$$|x(t) - y(t)| \leq \epsilon \ per \ t_0 \leq t \leq t_1;$$

iii) si ha

$$\overline{S(t_0, t_1; \xi)} = S_0(t_0, t_1; \xi) \neq \emptyset \text{ compatto}$$

in $C([t_0, t_1; R^n)$.

La dimostrazione si puó trovare in [1].

Proposizione 2. *Sotto le ipotesi (H0)-(H3) si ha, per* $0 \leq \tau \leq 1, \xi \in R^n$,

$$V(\tau, \xi) = \min\{f(x(1)) | \, x(\cdot) \in S_0(\tau, 1; \xi)\}$$

e, se il minimo viene assunto in $\bar{x}(\cdot) \in S_0(\tau, 1; \xi)$, *si ha*

i) $\quad V(\tau, \xi) = V(t, \bar{x}(t)) = f(\xi)$ *per* $\tau \leq t \leq 1$.

Inoltre si ha per ogni $x(\cdot) \in S_0(\tau, 1; \xi)$

ii) $\quad V(\tau, \xi) \leq V(t, x(t))$ *per* $\tau \leq t \leq 1$.

La prima affermazione segue subito dalla Proposizione 1; per le altre rimandiamo, per esempio, a [3], [4], [5].

Lemmma 1. *Sia* $R > 0$ *e sia*

$$\gamma(t) = \left[1 + \|\lambda\|_1 e^{\|\lambda\|_1}\right] [r(t) + \lambda(t)R], \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$M = R + \|\gamma\|_1.$$

Allora si ha per ogni $x(\cdot) \in S_0(t_0, t_1; \xi), \quad 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq 1, \quad |\xi| \leq R, \quad |\xi'| \leq R$

i) $\quad |x(t_1) - \xi| \leq \int_{t_0}^{t_1} \gamma(s)\, ds,$

ii) $\quad |x(t_1)| \leq M,$

iii) $\quad |V(t_1, \xi') - V(t, \xi)| \leq C \left(|\xi - \xi'| + \int_{t_0}^{t_1} \gamma(s)\, ds\right),$

per una opportuna costante $C = C(R)$.

Per la dimostrazione rimandiamo a [8], punto 3.

Proposizione 3. *Esiste* $J \subset [0, 1]$ *di misura nulla tale che per ogni* $R > 0$ *e* $t \notin J$ *si ha*

$$1/h \int_t^{t+h} \sup_{|\xi| \leq R} D\left[F_0(s, \xi), F_0(t, \xi)\right] ds \underset{h \to 0+}{\longrightarrow} 0,$$

ove $D(A_1, A_2)$ *indica la distanza di Hausdorff fra gli insiemi* A_1 *e* A_2

Per la dimostrazione utilizziamo la formula

$$D(A_1, A_2) = \max_{y \in B} |\delta^*(y|A_2) - \delta^*(y|A_1)|,$$

con

$$\delta^*(y|A) = \max_{u \in A} yu,$$

valida per ogni A_1 e A_2 convessi compatti non vuoti (cfr [2], Theor.II.18). Dalla Prop.3.2.4 di [3] segue che la funzione

$$[0,1] \ni t \longrightarrow \delta^*(y|F_0(t,\xi))$$

é misurabile e che si ha

$$|\delta^*(y|F_0(t,\xi)) - \delta^*(y'|F_0(t,\xi'))| \leq$$

$$\leq [r(t) + \lambda(t)R]|y - y'| + \lambda(t)|\xi - \xi'|$$

per $|\xi|$, $|\xi'| \leq R$ e y, $y' \in B$. Ne segue

$$|\delta^*(y|F_0(t,\xi))| \leq |y|(r(t) + \lambda(t)R)$$

e quindi la funzione $t \longrightarrow \delta^*(y|F_0(t,\xi))$ é sommabile su $[0,1]$.
Poniamo

$$H(t)(\xi,y) = H(t,\xi,y) = \delta^*(y|F_0(t,\xi)).$$

Allora si ha

$$[0,1] \ni t \longrightarrow H(t) \in C(RB \times B)$$

e la funzione $H(\cdot)$ é misurabile. Infatti $C(RB \times B)$ é uno spazio di Banach separabile e per ogni $g \in C(RB \times B)$ e A sottoinsieme numerabile e denso in $RB \times B$ si ha

$$\|g - H(t)\| = \max_{\substack{|\xi| \leq R \\ |y| \leq 1}} |g(\xi,y) - H(t,\xi,y)| =$$

$$\sup_{(\xi,y) \in A} |g(\xi,y) - H(t,\xi,y)|$$

Dunque la funzione

$$[0,1] \ni t \longrightarrow \|g - H(t)\|$$

é misurabile e quindi anche $H(\cdot)$ é misurabile (cfr. [2], Theor.III.9).
Si ha anche

$$\|H(t)\| \leq r(t) + \lambda(t)R$$

e quindi $H(\cdot)$ é sommabile. Ora segue dal Corollary 2.9.9 di [6] che esiste $J_R \subset [0,1]$ di misura nulla tale che per ogni $t \notin J_R$ si ha

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|H(s) - H(t)\|\, ds \underset{h \to 0+}{\longrightarrow} 0$$

Ora si conclude la dimostrazione ponendo

$$J = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$$

e osservando che

$$\|H(s) - H(t)\| = \max_{\substack{|\xi| \leq R \\ |y| \leq 1}} |\delta^*(y|F_0(s,\xi)) - \delta^*(y|F_0(t,\xi))| =$$

$$\max_{|\xi| \leq R} D[F_0(s,\xi) - D[F_0(t,\xi)].$$

Osservazione.– Dalla Proposizione 3 segue la Prop.4.1 di [8]. Infatti si ha per ogni $t \notin J$ e $\xi \in R^n$

a) $\quad v \in \operatorname{co}F(t,\xi) \Rightarrow d(v, \frac{1}{h}\int_t^{t+h} F(s,\xi)\,ds) \underset{h \to 0+}{\longrightarrow} 0,$

b) $\quad \liminf_{h \to 0+} d(v, \frac{1}{h}\int_t^{t+h} F(s,\xi)\,ds) = 0 \Rightarrow v \in \operatorname{co}F(t,\xi).$

Per provare a), osserviamo che dal teorema di Aumann (cfr.[3], Theor.3.1.3) segue

$$\int_t^{t+h} F(s,\xi)\,ds) = \int_t^{t+h} F_0(s,\xi)\,ds) \neq \emptyset \text{ compatto convesso}$$

Per il Lemma III.39 di [2], esiste $\gamma(\cdot)$ misurabile tale che, per quasi ogni s in [t,t+h],

$$\gamma(s) \in F_0(s,\xi), \quad |v - \gamma(s)| = d(v, F_0(s,\xi))$$

e quindi

$$d(v, \frac{1}{h}\int_t^{t+h} F(s,\xi)\,ds) = d(v, \frac{1}{h}\int_t^{t+h} F_0(s,\xi)\,ds) \leq$$

$$\leq |v - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \gamma(s)\,ds| \leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} |v - \gamma(s)|\,ds =$$

$$= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} d(v, F_0(s,\xi)\,ds \leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} D[F_0(t,\xi), F_0(s,\xi)]\,ds \underset{h \to 0+}{\longrightarrow} 0$$

Per provare b) osserviamo che esiste una successione $0 < h_i \to 0$ tale che

$$d(v, \frac{1}{h_i}\int_t^{t+h_i} F(s,\xi)\,ds \underset{i \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Esiste ancora una selezione sommabile $\gamma_i(s) \in F(s,\xi)$ per quasi ogni s in [t,t+h] tale che

$$v_i = \frac{1}{h_i}\int_t^{t+h_i} \gamma_i(s)\,ds \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} v.$$

Per ogni $y \in B$ si ha

$$yv_i = \frac{1}{h_i}\int_t^{t+h_i} y\gamma_i(s)\,ds \le \frac{1}{h_i}\int_t^{t+h_i} \delta^\star(y, |F_0(s,\xi))\,ds$$

e quindi, passando al limite,

$$yv \le \delta^\star(y, |F_0(t,\xi))$$

Di qui segue $v \in F_0(t,\xi)$.

Le affermazioni a) e b) sono provate in [7] sotto l'ipotesi di $F(\cdot,\cdot)$ continua.

Lemma 2. *Soto le ipotesi (H0)-(H3), esiste $J \subset [0,1]$ di misura nulla tale che*

$$\liminf_{h\to 0} \frac{V(t+h, \xi+hv) - V(t,\xi)}{h} \ge 0$$

per ogni $t \notin J$, $\xi \in R^n$, $v \in F_0(t,\xi)$.

Per la dimostrazione fissiamo $x_h(\cdot) \in S_0(t+h, 1; \xi+hv)$ tale che

$$V(t+h, \xi+hv) = f(x_h(1))$$

e poniamo

$$x_h(s) = \xi + (s-t)v \text{ per } t \le s \le t+h$$

Segue dalla Proposizione 1 che esiste $y(\cdot) \in S_0(t,1;\xi)$ tale che

$$|y(1) - x_h(1)| \le e^{\|\lambda\|_1} \int_t^1 d(\dot{x}(s), F_0(s, x_h(s))\,ds =$$

$$= e^{\|\lambda\|_1} \int_t^{t+h} d(v, F_0(s, \xi+(s-t)v))\,ds \le$$

$$\le e^{\|\lambda\|_1} \left[\int_t^{t+h} d(v, F_0(s,\xi)\,ds + \int_t^{t+h} \lambda(s)(s-t)|v|\,ds\right]$$

Dal Lemma 1 segue

$$|y(1)|,\ |x_h(1)| \le M$$

e di qui segue, a causa di H(0),

$$|f(y(1)) - f(x_h(1))| \le M_1|y(1) - x_h(1)|,$$

per una certa costante M_1.

Fissiamo $t \notin J$, con J come nella Proposizione 3. Ora si ha ($h \ge 0$)

$$V(t,\xi) \leq f(y(1)),$$

$$\frac{V(t+h,\xi+hv)-V(t,\xi)}{h} \geq \frac{1}{h}[f(x_h(1)-f(y(1))] \geq -\frac{M_1}{h}|x_h(1)-y(1)| \geq$$

$$\geq -M_1 e^{\|\lambda\|_1}\left[\frac{1}{h}\int_t^{t+h} d(v,F_0(s,\xi)\,ds + \int_t^{t+h}\lambda(s)\frac{(s-t)}{h}|v|\,ds\right] \geq$$

$$-M_1 e^{\|\lambda\|_1}\left[\frac{1}{h}\int_t^{t+h} D[F_0(t,\xi),F_0(s,\xi)]\,ds + \int_t^{t+h}\lambda(s)|v|\,ds\right] \underset{h\to 0+}{\longrightarrow} 0$$

e quindi

$$\liminf_{h\to 0+}\frac{V(t+h,\xi+hv)-V(t,\xi)}{h} \geq 0.$$

Lemma 3. *Sotto le ipotesi (H0)-(H3), esiste $J \subset [0,1]$ di misura nulla tale che per ogni $t \notin J$ e $\xi \in R^n$ esiste $v_0 \in F_0(t,\xi)$ verificante la condizione*

$$\liminf_{h\to 0}\frac{V(t+h,\xi+hv_0)-Vt,\xi)}{h} \leq 0$$

Prendiamo J che verifichi le condizioni della Proposizione 3 e tale che ogni $t \notin J$ sia punto di Lebesgue per $r(\cdot)$ e $\lambda(\cdot)$.
Fissiamo $x_0(\cdot) \in S_0(t,1;\xi)$ tale che

$$V(t,\xi) = f(x_0(1))$$

Si ha, se $t \notin J$ e $h \geq 0$, da (H3) e dal Lemma 1

$$\left|\frac{x_0(t+h-x_0(t)}{h}\right| \leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h}|\dot{x}_0(s)|\,ds \leq$$

$$\leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h}[r(s)+\lambda(s)|x_0(s)|]\,ds \leq$$

$$\leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h}[r(s)+\lambda(s)M]\,ds \underset{h\to 0+}{\longrightarrow} r(t)+\lambda(t)M < \infty$$

Ne segue che esiste una successione $h_i \to 0+$ per $i \to \infty$ tale che

$$v_i = \frac{x_0(t+h_i)-x_0(t)}{h_i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} v_0$$

Per ogni $y \in B$ si ha

$$yv_i = \frac{1}{h_i}\int_t^{t+h_i} y\dot{x}_0(s)\,ds \le \frac{1}{h_i}\int_t^{t+h_i} \delta^\star(y|F_0(s,x_0(s)))\,ds \le$$

$$\frac{1}{h_i}\int_t^{t+h_i} \delta^\star(y|F_0(s,\xi))\,ds + \frac{1}{h_i}\int_t^{t+h_i} \lambda(s)|x_0(s)-x_0(t)|\,ds$$

Dalla maggiorazione all'inizio della dimostrazione segue

$$|x_0(t+h)-x_0(t)| \le h[r(t)+\lambda(t)M+1] \text{ per } 0<h\le\overline{h}$$

e quindi (per $i \ge \overline{i}$)

$$\frac{1}{h_i}\int_t^{t+h_i} \lambda(s)|x_0(s)-x_0(t)|\,ds \le$$

$$\frac{1}{h_i}\int_t^{t+h_i} \lambda(s)\frac{s-t}{h_i}[r(t)+\lambda(t)M+1]\,ds \le$$

$$\le [r(t)+\lambda(t)M+1]\int_t^{t+h_i} \lambda(s)\,ds \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$$

Da questo e dalla Proposizione 3 si ottiene

$$yv_0 \le \delta^\star(y|F_0(t,\xi))$$

e di qui segue che $v_0 \in F_0(t,\xi)$.
Per la Proposizione 2 si ha

$$V(t,\xi) = V(t+h, x_0(t+h)),\ \forall h>0$$

e quindi, se $t \notin J$,

$$0 = \frac{V(t+h_i, x_0(t+h_i)) - V(t,\xi)}{h_i} =$$

$$= \frac{V(t+h_i, x_0(t)+h_iv_0) - V(t,\xi)}{h_i} +$$

$$+\frac{V(t+h_i, x_0(t+h_i)) - V(t+h_i, x_0(t)+h_iv_0))}{h_i}$$

e di qui e dal Lemma 1 segue

$$\frac{V(t+h_i, \xi+h_iv_0) - V(t,\xi)}{h_i} =$$

$$= -\frac{V(t+h_i, x_0(t+h_i)) - V(t+h_i, x_0(t)+h_iv_0))}{h_i} \le$$

$$\le C\left|\frac{x_0(t+h_i)-x_0(t)}{h_i} - v_0\right| \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$$

Dunque riesce

$$\liminf_{h\to 0+} \frac{V(t+h,\xi+hv_0)-V(t,\xi)}{h} \le 0$$

Con questo il Lemma 3 é provato.

Dalla Proposizione 1 e dai lemmi 1,2,3 segue il Teorema 1.

I risultati principali di [8] sono contenuti nel Teorema 1 e nel seguente

TEOREMA 2. *Supponiamo che valgano le condizioni (H0)-(H3) e che la funzione*

$$W : [0,1] \times R^n \to R^n$$

verifichi le condizioni

a) per ogni $R > 0$ *e* $\epsilon > 0$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che*

$$\sum_1^m \sup_{|\xi|\le R} |W(b_i,\xi) - W(a_i,\xi)| \le \epsilon$$

per ogni m-pla di intervalli disgiunti $[a_i, b_i] \subset [0,1]$ *tali che* $\sum_1^m (b_i - a_i) \le \delta$ *;*

b) per ogni $R > 0$ *esiste una costante* $C \ge 0$ *tale che*

$$|W(t,\xi') - W(t,\xi)| \le C|\xi' - \xi|$$

per $0 \le t \le 1$ *e* $|\xi|, |\xi'| \le R$*;*

c) $\quad W(1,\xi) = f(\xi)$ *per ogni* $\xi \in R^n$*;*

d) esiste $J \subset [0,1]$ *di misura nulla tale che*

$$\liminf_{h\to 0+} \frac{W(t+h,\xi+hv) - W(t,\xi)}{h} \ge 0$$

per ogni $t \notin J$, $\xi \in R^n$, $v \in F(t,\xi)$.

Allora si ha

i) $\quad W(t,\xi) \le V(t,\xi)$ *per* $0 \le t \le 1$, $\xi \in R^n$*;*

ii) se $x(\cdot) \in S(0,1;x_0)$ *verifica la condizione*

$$W(0,x_0) \ge f(x(1)),$$

allora $x(\cdot)$ *é soluzione del problema (P).*

Per la dimostrazione prendiamo $y(\cdot) \in S(t,1;\xi)$.
Per il Lemma 1 si ha $|y(s)| \le M$ per $t \le s \le 1$ .La funzione

$$g(s) = W(s,y(s)),\ t \le s \le 1,$$

é assolutamente continua (cfr [8], Lemma 6.1) ed esiste $J_1 \subset [0,1]$ di misura nulla tale che ogni $s \notin J_1$ é punto di Lebesgue per $\dot g(\cdot)$ e per $\dot y(\cdot)$ e inoltre

$$\dot{y}(s) \in F(s, y(s)),$$

$$\liminf_{h\to 0+} \frac{W(s+h, y(s)+h\dot{y}(s)) - W(s, y(s))}{h} \geq 0.$$

Ne segue (cfr [8], Lemma 5.2)

$$\dot{g}(s) = \lim_{h\to 0+} \frac{W(s+h, y(s)+h\dot{y}(s)) - W(s, y(s))}{h} \geq 0$$

per $s \notin J_1$, e quindi

$$f(y(1)) - W(t,\xi) = W(1, y(1)) - W(t, y(t)) = \int_t^1 \dot{g}(s)\, ds \geq 0$$

Di qui si ottiene i) prendendo l'estremo inferiore rispetto a $y(\cdot)$ e si ottiene ii) prendendo $t = 0$ e $\xi = x_0$.

Prima di esporre i risultati di [9] richiamiamo da [2] alcuni fatti relativi al gradiente generalizzato di una funzione $f : R^n \to R$ localmente lipschitziana.

$$\partial f(x) = \ \mathrm{co}\{\lim \nabla f(x_i) | x_i \to x \text{ per } i \to \infty\},$$

$$f^0(x; v) = \limsup_{(x',h)\to(x,0+)} \frac{f(x'+hv) - f(x')}{h} =$$

$$\max\{yv |\, y \in \partial f(x)\}, \quad v \in R^n,$$

$\partial f(x)$ é non vuoto, convesso e compatto,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x' : |x' - x| \leq \delta \Rightarrow \partial f(x') \subset \partial f(x) + \epsilon B.$$

Consideriamo la condizione
(H3') esiste una costante positiva K tale che

$$F(t, x) \subset K(1 + |x|)B \text{ per } 0 \leq t \leq 1,\ x \in R^n.$$

Dal Lemma 1 segue che V é localmente lipscitziana su $[0,1] \times R^n$, se F verifica le condizioni (H1),(H2), (H3').

Il risultato principale di [9] é dato dal seguente

TEOREMA 3. *Sotto le ipotesi (H0),(H1),(H2),(H3'), sia* $x^* \in S(0,1;x_0)$ *una soluzione del problema (P). Allora esiste* $p(\cdot) \in W^{1,1}(0,1;R^n)$ *tale che*

$$(-\dot{p}(t), \dot{x}(t)) \in \partial H(t, x(t), p(t)) \ q.d. \ su\ [0,1],$$

$$-p(o) \in \partial_x V(0, x_0),$$

$$-p(1) \in \partial f((x^\star(1)),$$

$$(h(t), -p(t)) \in \partial V(t, x^\star(t)) \quad ,, \quad ,$$

essendo

$$h(t) = H(t, x^\star(t), p(t)).$$

Questo teorema generalizza precedenti risultati dello stesso tipo contenuti in [3], [4], [5].

Ricordiamo che si é posto

$$H(t,x,p) = \sup\{pv | v \in F(t,x)\}.$$

Per la dimostrazione, contenuta in [9], si costruisce una famiglia di problemi ausiliari dipendente da un parametro $\epsilon > 0$. A questi problemi si applicano le note (da [2]) condizioni necessarie e quindi si passa al limite per $\epsilon \to 0$.

Per $0 < \epsilon < 1$, poniamo

$$G_\epsilon(t) = \bigcup_{|(s,y)-(t,x^\star(t))| \leq \epsilon} \partial V(s,y), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\sigma_\epsilon(t,v,w) = \delta^\star((w, -(1+w)v) | G_\epsilon(t)) =$$

$$= \sup_{(\alpha,\beta) \in G_\epsilon(t)} (\alpha w - (1+w)\beta v), \quad v, w \in R^n,$$

$$F_\epsilon(t,(y,x)) = \{\sigma_\epsilon(t,v,w), (1+w)(e+v) | e \in F(t,x), |v|, |w| \leq \epsilon\}, \quad y \in R, x \in R^n,$$

$$J_\epsilon(y(\cdot), x(\cdot)) = f(x(1)) - V(0, x(0)) + y(1) - y(0)$$

per ogni $(y(\cdot), x(\cdot)) \in W^{1,1}(0,1; R \times R^n)$.

Si verifica che

$$G_\epsilon(t) \subset K_1 B \qquad \text{per } 0 \leq t \leq 1,$$

con K_1 costante opportuna;

$\sigma_\epsilon(\cdot, u, v)$ é misurabile (u.s.c.);

$\sigma_\epsilon(t, \cdot, \cdot)$ é lipschitziana unif. su $\epsilon B \times \epsilon B$;

F_ϵ verifica condizioni di tipo (H1),(H2),(H3') e quindi anche $\mathrm{co}F_\epsilon$.

Lemma 4. *Sia* $(y(\cdot), x(\cdot)) \in W^{1,1}(0,1;R^{n+1})$ *tale che*

$$(\dot{y}(t), \dot{x}(t)) \in F_\epsilon(t, (y(t), x(t))) \quad q.d.,$$

$$|x(t) - x^\star(t)| < \epsilon \ \ per \ \ 0 \leq t \leq 1.$$

Allora si ha

$$J_\epsilon(y(\cdot), x(\cdot)) \geq J_\epsilon(0, x^\star(\cdot)).$$

Per la dimostrazione si prendono le funzioni misurabili $e(\cdot)$, $v(\cdot)$, $w(\cdot)$, tali che

$$(i) \qquad \begin{cases} \dot{y}(t) = \sigma_\epsilon(t, v(t), w(t)) \quad q.d., \\ \dot{x}(t) = [1 + w(t)][e(t) + v(t)] \quad q.d., \\ e(t) \in F(t, x(t)), \ |v(t)| \leq \epsilon, \ |w(t)| \leq \epsilon \quad q.d., \end{cases}$$

e si ottiene

$$J_\epsilon(y(\cdot), x(\cdot)) = V(x(1)) - V(0, x(0)) + \int_0^1 \sigma_\epsilon(t, v(t), w(t))\, dt =$$

$$\int_0^1 [D_t V(t, x(t)) + \sigma_\epsilon(t, v(t), w(t))]\, dt,$$

mentre riesce

$$J_\epsilon(0, x^\star(1)) - V(0, x^\star(0)) = 0$$

Se nel punto t valgono le relazioni i), se

$$\liminf_{h \to 0+} \frac{V(t+h, x(t) + he(t)) - V(t, x(t))}{h} \geq 0,$$

se esiste la derivata $D_t V(t, x(t))$ e se t é punto di Lebesgue per $\dot{x}(\cdot)$, si ha

$$D_t V(t, x(t)) + \sigma_\epsilon(t, v(t), w(t)) = g_\epsilon(t) \geq$$

$$D_t V(t, x(t)) + \delta^\star((w(t), -(1 + w(t))v(t)) | \partial V(t, x(t))) =$$

$$D_t V(t, x(t)) + V^0(t, x(t); w(t), -(1 + w(t))v(t)) =$$

$$\lim_{h \to 0+} \left[\frac{Vt + h, x(t+h)) - Vt, x(t))}{h} + \right.$$

$$\left. + \sup_{\substack{|t'-t| \leq Lh \\ |x' - x(t)| \leq Lh \\ 0 < \lambda \leq Lh}} \frac{V(t' + \lambda w(t), x' - \lambda(1 + w(t))v(t)) - Vt', x')}{\lambda} \right],$$

essendo $L \geq 1$ una costante tale che (cfr.Lemma1)

$$|x(t+h) - x(t)| \leq L|h|.$$

Se si pone

$$t' = t + h,\ x' = x(t+h),\ \lambda = h,$$

si ottiene $(h > 0)$

$$\frac{V(t+h, x(t+h) - V(t, x(t))}{h} + \sup_{\dots} \frac{\dots}{\lambda} \geq$$

$$\geq \frac{1}{h}\left[V(t + h + hw(t), x(t+h) - h(1+w(t))v(t)) - V(t, x(t))\right] =$$

$$= \frac{1}{h}\left[V(t + h(1+w(t)), x(t) + h\dot{x}(t) - h(1+w(t))v(t) - V(t, x(t))\right] +$$

$$+\frac{1}{h}\left[V(t + h(1+w(t)), x(t+h) - h(1+w(t))v(t)) -\right.$$

$$\left.-V(t + h(1+w(t)), x(t) + h\dot{x}(t) - h(1+w(t))v(t))\right] \geq$$

$$\geq \frac{1}{h}\left[V(t + h(1+w(t)), x(t) + h(1+w(t))e(t)) - V(t, x(t))\right] -$$

$$-L_1\left|\frac{x(t+h) - x(t)}{h} - \dot{x}(t)\right|,$$

per una opportuna costante $L_1 > 0$, a causa di (i) e della locale lipschitzianitá di V.
Dunque si ottiene

$$g_\epsilon(t) \geq \liminf_{k \to 0+} \frac{V(t+k, x(t) + ke(t)) - V(t, x(t))}{k}(1 + w(t)) \geq 0$$

e con questo il lemma é provato.

Pertanto, per ogni $0 < \epsilon < 1$, $(y(\cdot) = 0, x^\star(\cdot))$ é soluzione del prolema

$$(P_\epsilon) \quad \begin{cases} J_\epsilon(y(\cdot), x(\cdot)) \to min \\ (y(\cdot), x(\cdot)) \in W^{1,1}(0,1; R \times R^n), \\ (\dot{y}(t), \dot{x}(t)) \in F_\epsilon(t, (y(t), x(t))\ q.d. \\ |x(t) - x^\star(t)| < \epsilon \ \text{ per } \ 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

e quindi anche del problema ottenuto sostituendo coF_ϵ a F_ϵ in $(P\epsilon)$, per la Proposizione 2. Questo permette di applicare le condizioni necessarie di [2] (Corollary 2 al Theor.3.2.6) e ottenere le funzioni $(q_\epsilon(\cdot), p_\epsilon(\cdot)) \in W^{1,1}(0,1; R \times R^n)$ tali che

$$\begin{cases} (-\dot{q}_\epsilon(t), -\dot{p}_\epsilon(t), \dot{y}(t) \equiv 0, \dot{x}^\star(t)) \in \partial H_\epsilon(t, (y(t) \equiv 0, x^\star(t)), (q_\epsilon(t), p_\epsilon(t)))\ q.d. \\ -p_\epsilon(0) \in \partial V(0, x^\star(0)),\ q_\epsilon(0) = -1, \\ -p_\epsilon(1) \in \partial f(x^\star(1)),\ q_\epsilon(1) = -1, \end{cases}$$

con

$$H_\epsilon(t, (y, x), (q, p)) = \max\{q\sigma_\epsilon(t, v, w) + (1+w)p(e+v)\ |e \in F(t, x),\ |v| \leq \epsilon,\ |w| \leq \epsilon\}$$

$$= \max\{q\sigma_\epsilon(t, v, w) + (1 + w)H(t, x, p) + (1 + w)pv\ |\ |v| \leq \epsilon,\ |w| \leq \epsilon\}$$

Di qui segue, per quasi ogni t,

$$\dot{q}_\epsilon(t) = 0,$$

$$(-\dot{p}_\epsilon(t), \dot{x}^\star(t)) \in \partial H(t, x^\star(t), p_\epsilon(t)) + \epsilon(\lambda(t)|p_\epsilon(t)|B) \times K(1 + |x^\star(t)|B) +$$

$$+ \{0\} \times \epsilon(1 + \epsilon)B,$$

$$(q_\epsilon(t), p_\epsilon(t)).(0, \dot{x}^\star(t)) = H_\epsilon(t, (, x^\star(t)), (q_\epsilon(t), p_\epsilon(t))) \geq$$

$$\geq q_\epsilon(t)\sigma_\epsilon(t, v, w) + (1 + w)p_\epsilon(t)[\dot{x}^\star(t) + v],$$

per ogni $|v| \leq \epsilon,\ |w| \leq \epsilon$.
Si ha poi

$$q_\epsilon(t) = -1 \text{ per } 0 \leq t \leq 1,$$

$$wp_\epsilon(t)\dot{x}^\star(t) + (1 + w)vp_\epsilon(t) \leq \sigma_\epsilon(t, v, w) =$$

$$\delta^\star((w, -(1 + w)v|G_\epsilon(t))$$

e il punto $(w, -(1 + w)v)$ descrive un intorno di 0 al variare di v e w sotto le condizioni $|v| \leq \epsilon,\ |w| \leq \epsilon$. Ne segue,per ogni $\eta > 0$,

$$(p_\epsilon(t)\dot{x}^\star(t), -p_\epsilon(t)) \in \overline{co}G_\epsilon(t) \subset \partial V(t, x^\star(t)) + \eta B$$

per $0 < \epsilon \leq \epsilon_\eta$.

Ora si puó "passare al limite per una successione $\epsilon_i \to 0+$ per $i \to \infty$" e si ottiene da quanto visto sopra una funzione limite $p(\cdot) \in W^{1,1}(0, 1; R^n)$ tale che (per quasi ogni t)

$$-p(0) \in \partial_x V(0, x^\star(0)), \quad -p(1) \in \partial f(x^\star(1)),$$

$$(-\dot{p}(t), \dot{x}^\star(t)) \in \partial H(t, x^\star(t), p(t)),$$

$$(p(t)\dot{x}^\star(t), -p(t)) \in \bigcap_{\eta>0} [\partial V(t, x^\star(t)) + \eta B] = \partial V(t, x^\star(t)),$$

$$p(t)\dot{x}^\star(t) = H(t, x^\star(t), p(t))$$

e questo conclude la dimostrazione.

Consideriamo ora il seguente problema

$$(Q) \quad \begin{cases} h(x(1)) + \int_0^1 L(t, x(t), u(t))\, dt \to min \\ x(\cdot) \in W^{1,1}(0,1; R^n), \ u(\cdot) : [0,1] \to R^m \text{ mis. }, \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \text{ q.d. su } [0,1], \\ u(t) \in U(t) \qquad ,, \qquad , \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Sotto le ipotesi

(C0) $h : R^n \to R$ localmente lipschitziana;

(C1) $[0,1]\times R^n \times R^m \ni (t,x,u) \to \tilde{f}(t,x,u) = (L(t,x,u), f(t,x,u)) \in R\times R^n$ é t-misurabile e u-continua;

(C2) esiste $\lambda(\cdot) \in L^1(0,1)$ tale che per ogni $x, x' \in R^n$, $u \in U(t)$ si ha

$$|\tilde{f}(t,x',u) - \tilde{f}(t,x,u)| \le \lambda(t)|x' - x|,$$

(C4) $[0,1] \times R^m \supset U =$ boreliano e

$$U(t) = \{y \in R^m \mid (t,y) \in U\} \neq \emptyset \text{ compatto per } 0 \le t \le 1,$$

in [9] é provato anche il seguente

TEORMA 4. *Sia* $(x^\star(\cdot), u^\star(\cdot))$ *una soluzione del problema (Q). Esiste* $p(\cdot) \in W^{1,1}(0,1; R^n)$ *tale che*

$$-\dot{p}(t) \in \partial_x \tilde{H}(t, x^\star(t), p(t), u(t)) \text{ q.d. su } [0,1],$$

$$\tilde{H}(t, x^\star(t), p(t), u^\star(t)) = \max_{u \in U(t)} \tilde{H}(t, x^\star(t), u) \quad ,, \quad ,$$

$$-p(0) \in \partial_x V(0, x_0), \quad -p(1) \in \partial h(x^\star(1)),$$

$$(\tilde{h}(t), -p(t)) \in \partial V(t, x^\star(t)) \quad ,, \quad ,$$

dove si é posto

$$\tilde{H}(t,x,p,u) = pf(t,x,u) - L(t,x,u),$$

$$V(t,x) = \inf\left\{h(y(1)) + \int_t^1 L(s,y(s),u(s))\,ds \mid y(t) = x, \dots\right\},$$

$$\tilde{h}(t) = p(t)f(t,x^\star(t),u^\star(t)) - L(t,x^\star(t),u^\star(t)).$$

BIBLIOGRAFIA

1. J.P.Aubin, A.Cellina, *Differential Inclusions*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
2. C.Castaing, M.Valadier, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Lecture Notes in Math.n.580, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
3. F.H.Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley Interscience, New York, 1983.
4. F.H.Clarke, R.B.Vinter, *The relationship between the maximum principle and dynamic programming*, SIAM J. Control and Optim. **25**,**5** (1987), 1291- 1311.
5. F.H.Clarke, *Methods of Dynamic and Nonsmooth Optimization*, SIAM, Philadelphia, 1989.
6. H.Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1969.
7. H.Frankowska, *Optimal trajectories associated to a solution of the contingent Hamilton-Jacobi equations*, Appl.Math.Optim. **19** (1989), 291-311.
8. F.H.Clarke, R.B.Vinter, *Regularity properties of optimal controls*, SIAM J. Control and Optim. **28**, **4** (1990), 980- 997.
9. R.B.Vinter, P.Wolenski, *Hamilton-Jacobi theory for optimal control problems with data measurable in time*, SIAM J. Control and Optim. **28**,**6** (1990), 1404-18.
10. R.B.Vinter, P.Wolenski, *Coextremals and the value function for control problems with data measurable in time*, J.Math.Anal.Appl. **153** (1990), 37-51.